

用于有界噪声时变矩阵计算的终端零化神经网络

仲国民, 唐逸飞, 孙明轩

(浙江工业大学信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 为提升零化神经网络 (ZNN) 求解时变矩阵计算问题时的收敛性能, 提出一种具有抗噪能力的终端零化神经网络 (TZNN) 及其对数加速形式 (LA-TZNN)。对误差动态的终态吸引力展开分析, 结果表明所提网络在受到有界噪声干扰时仍能在固定时间内使误差归零, 其中 LA-TZNN 可实现对数调节时间稳定, 收敛速度相较于 TZNN 更快。考虑到实际情况中初始误差有界, 给出半全局意义上的调节时间上界, 并通过设置可调参数, 使网络实现预定义时间稳定。将 2 种模型应用于时变矩阵求逆和 PUMA560 机械臂重复运动规划问题, 仿真结果验证了所提方法相较于传统 ZNN 设计, 调节时间更短, 收敛精度更高, 并能够有效抑制有界噪声干扰。

关键词: 时变矩阵计算; 零化神经网络; 固定/预定义时间收敛; 重复运动规划

中图分类号: TP183

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2024166

Terminal zeroing neural network for time-varying matrix computing under bounded noise

ZHONG Guomin, TANG Yifei, SUN Mingxuan

College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China

Abstract: To improve the convergence performance of zeroing neural network (ZNN) for time-varying matrix computation problems solving, a terminal zeroing neural network (TZNN) with noise resistance and its logarithmically accelerated form (LA-TZNN) were proposed. The terminal attraction of the error dynamic equation were analyzed, and the results showed that the neural state of the proposed networks can converge to the theoretical solution within a fixed time when subjected to bounded noises. In addition, the LA-TZNN could achieve logarithmical settling-time stability, and its convergence speed was faster than the TZNN. Considering that the initial error was bounded in actual situations, an upper bound of the settling-time in a semi-global sense was given, and an adjustable parameter was set to enable the network to converge within a predefined time. The two proposed models were applied to solve the time-varying matrix inversion and trajectory planning of redundant manipulators PUMA560. The simulation results further verified that compared with the conventional ZNN design, the proposed methods have shorter settling-time, higher convergence accuracy, and can effectively suppress bounded noise interference.

Keywords: time-varying matrix computation, ZNN, fixed/predefined-time convergence, repetitive motion planning

收稿日期: 2024-03-11; 修回日期: 2024-08-27

通信作者: 仲国民, zgm@zjut.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62073291, No.62222315); 浙江省自然科学基金资助项目 (No.LZ22F030007)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.62073291, No.62222315), Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (No.LZ22F030007)

0 引言

矩阵方程求解作为一类重要的数学分析与计算问题, 应用场景广泛^[1]。通常可采用基于串行处理的数值迭代方法来解决, 如 Zhu 等^[2]提出一种级数展开算法, 简化了加权最小二乘解中复杂的逆矩阵计算, 在确保结果有效性的前提下有效降低了计算量。但在面对高维问题时, 由于计算复杂度近似为矩阵维数的三次幂, 计算负担将随之急剧增加, 处理速度受到限制, 可能无法满足连续实时计算的需求。神经网络方法具有并行计算和分布式存储等特点, 在处理高维问题上, 逐渐受到重视并被广泛研究。梯度神经网络 (GNN, gradient neural network), 作为递归神经网络的一个重要分支, 可沿负梯度方向不断降低代价函数, 迫使各神经状态逐渐逼近理论值^[3]。在求解动态问题时, 由于参数具有时变特性, 梯度下降法难以保证代价函数始终处于递减状态^[4], 且可能会陷入局部最小点。此外 GNN 的计算精度与收敛速度往往无法兼得^[5]。因此, 该方法一般只适用于静态场景, 对于解决时变高维问题仍需寻求新的方法。

零化神经网络 (ZNN, zeroing neural network), 一种源自于 Hopfield 神经网络的并行单层反馈神经动力学模型, 解决了 GNN 时间导数信息缺失的问题。与传统基于标量误差的方法不同, ZNN 定义了向量或矩阵形式的误差函数并设计了对应的误差动态, 理论上所有误差子元素均能全局渐进收敛至零, 可满足大规模实时并行计算的需求, 被广泛应用于各类时变问题的求解, 如矩阵逆运算^[6]、矩阵方程^[7-8]、约束二次规划^[9]和不等式^[10]等。作为一种处理时变问题的强大工具, ZNN 也被用于实际科学与工程领域, 如机器人重复运动规划^[11]、数字图像处理^[12]、混沌系统同步^[13]和多智能体系统协同控制^[14]等。

稳定性是评价 ZNN 收敛性能的一个关键指标, Zhang 等^[15]为求解时变西尔维斯特 (Sylvester) 公式, 最早提出了一种带线性激活函数的 ZNN, 其可保证所有神经状态以全局指数速度稳定, 但在理论上仍需无限长的时间才能使误差真正归零, 这在实际应用中是不理想的, 亟须收敛速度更快的求解方案。为此, Xiao 等^[16]设计了多种非线性激活函数, 并在各类时变场合中验证了有限时间稳定性。由于缺乏对激活函数有界性的考虑, 该方法难以满

足硬件实现需求, 故 Sun 等^[17]提出一类有限值激活函数, 只涉及基础的代数运算和求根, 在实现有限时间收敛的前提下进一步降低了计算成本。然而有限时间稳定性高度依赖初始条件, 过大的初始误差会导致网络无法在期望时间内稳定, 因此一类固定、预定义时间稳定性^[18]的概念被研究和提出, 其调节时间具有一个与误差初态无关的上界, 并能通过修改内部参数被提前设定, 这在实际应用场合颇有意义。随后多种新型激活函数^[19-20]被设计, 以使 ZNN 可以在固定、预定义时间内完成收敛, 其中符号双幂函数^[21]最为典型, 并得到了广泛研究。为简化设置预定义时间的步骤, Qi 等^[22]设计了一类强、快预定义收敛 ZNN, 将调节时间上界转化为一个独立可直接修改的先验参数。为提升预定义精度, Li 等^[23]将设定时刻与时间的差值作为分母引入增益设计中, 迫使增益不断递增, 得到的 ZNN 可实现设定时间稳定性, 并能有效抑制噪声干扰。

外部噪声干扰会影响网络的收敛精度, 提升鲁棒性也是 ZNN 设计的重要环节。现有的抗噪措施大致可总结为 3 类, 第一类方法是修改增益形式, Zhang 等^[24]提出了一类随时间不断增加的时变增益, 加速误差收敛的同时还可削弱噪声影响。基于事件触发控制, Dai 等^[25]提出一种模糊自适应增益和分段预定义时间激活函数, 一旦噪声满足触发条件即可实时更新增益。为加快初始区间的收敛速度, Xiao 等^[26]对传统时变增益^[27]作出改进, 使增益从非零初值开始递增。第二类方法是引入积分结构^[28], 可以累积过去的误差信息并在短期内将其平滑化, 然而理论上单层积分在有限的时间内无法真正消除噪声, Li 等^[29]提出一种双重积分构型, 专用于处理线性噪声干扰。为了改善积分增强 ZNN 的稳定性, 提出一种新型激活函数^[30], 在固定时间内解决洛伦兹混沌系统的同步问题。Hu 等^[31]给出亚当斯-巴什福思 (Adams-Bashforth) 离散形式的误差动态, 验证了积分增强 ZNN 以差分模型求解时变问题的可行性。第三类方法是在激活函数中添加比例项和符号项^[32], 其中比例项用于加速和消除线性渐消噪声影响, 符号项用于抵消有界非渐消噪声干扰, 如 Jin 等^[33]设计了一种鲁棒性预定义 ZNN, 通过符号函数补偿外部噪声干扰。在实际工程应用领域, 外部噪声往往无法避免, 为

保证ZNN求解结果的有效性,需要进一步加强对其鲁棒性的研究。

在实际计算中,初始条件通常处于一个有界区域内,全局意义上的调节时间上界与实际调节时间相差过大,在构建预定义时间收敛ZNN时可能会损失计算精度。且在现有文献中,在半全局意义上研究ZNN稳定性相对较少。因此本文提出一种具有抗噪能力的终端零化神经网络(TZNN, terminal zeroing neural network)及其对数加速形式(LA-TZNN, logarithmically accelerated terminal zeroing neural network),并在半全局意义上实现预定义时间稳定性。本文主要创新与工作如下所示。

1) 基于噪声扰动的时变矩阵求逆问题,提出一种结构简单易于实现的TZNN模型,利用对数加速方法,得到调节时间更短的LA-TZNN模型,并给出相关神经拓扑结构图。

2) 对误差动态的终态吸引力展开分析,结果表明所提模型相较于传统ZNN设计,能有效消除有界噪声干扰,且调节时间具有与初始状态无关的上界,可实现固定时间稳定,并详细说明了增益取值对模型抗噪性能和收敛速度的影响。

3) 在半全局意义上给出最小调节时间上界,降低了全局估计的保守性,并通过修改激活函数表达式,使所提模型的调节时间可提前设定,具有预定义时间稳定性。

4) 将所提模型应用于时变矩阵求逆和带初始误差的PUMA560机械臂重复运动规划问题,在无噪声、有界噪声干扰环境下分别验证了本文方法的有效性和优越性。

1 问题描述和模型设计

1.1 时变矩阵求逆

时变矩阵求逆作为一类经典的时变矩阵计算问题,其表达形式如式(1)所示。

$$\mathbf{M}(t)\mathbf{X}(t) = \mathbf{I} \quad (1)$$

其中, $t \in [0, +\infty)$ 表示时间, $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示待求未知矩阵, $\mathbf{M}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个光滑可逆的时变矩阵,且导数信息 $\dot{\mathbf{M}}(t)$ 已知, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 n 阶单位阵。定义矩阵形式的误差函数为 $\mathbf{E}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{I}$, 当其中所有元素均收敛至零后,神经状态 $\mathbf{X}(t)$ 可以近似替代理论解 $\mathbf{X}^*(t) = \mathbf{M}^{-1}(t)$ 。考虑到实际计算中存在外部噪声干扰,可定义式(2)

所示的误差动态方程。

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = -\gamma\Phi(\mathbf{E}(t)) + \mathbf{N}(t) \quad (2)$$

其中, 误差函数 $\mathbf{E}(t) = \{e_{ij}(t)\}_{n \times n}$, $e_{ij}(t)$ 表示 $\mathbf{E}(t)$ 中第 ij 个误差分量; $\Phi(\cdot) = \{\phi(\cdot)\}_{n \times n}$ 表示 n 阶激活函数矩阵, $\phi(\cdot)$ 是一个单调递增的奇函数; $\gamma > 0$ 表示恒定增益; $\mathbf{N}(t) = \{n_{ij}(t)\}_{n \times n}$ 表示外部噪声干扰, 将误差函数 $\mathbf{E}(t)$ 代入误差动态式(2)中, 可以得到传统的噪声干扰ZNN模型为

$$\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{X}}(t) = -\dot{\mathbf{M}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(t) - \gamma\Phi(\mathbf{M}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{I}) \quad (3)$$

恒定增益 γ 和激活函数 $\phi(\cdot)$ 的选择会影响ZNN模型的收敛性能。增大 γ 可以提升ZNN模型的收敛速度, 激活函数 $\phi(\cdot)$ 将神经元的输入映射到输出端, 决定了ZNN模型的收敛性能。

1.2 固定时间收敛TZNN模型

在求解问题式(1)时, 希望ZNN模型式(3)在受到外部噪声干扰时仍具有优越的收敛性能, 本节以此展开研究, 提出一种固定时间收敛激活函数 $\phi_1(x)$ 。

$$\phi_1(x) = (1 + x^2)\text{sgn}(x) \quad (4)$$

将式(4)代入ZNN模型式(3)中, 得到一种具有固定时间收敛特性的TZNN模型。

$$\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{X}}(t) = -\dot{\mathbf{M}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(t) - \gamma(\mathbf{1} + \mathbf{E}^2(t))\text{sgn}(\mathbf{E}(t)) \quad (5)$$

其中, $\mathbf{E}^2(t) = \mathbf{E}(t) \odot \mathbf{E}(t)$, \odot 表示哈达马(Hadamard)积, 且 $\mathbf{1}$ 表示全1矩阵。为了加快TZNN模型式(5)的收敛速度, 对激活函数式(4)进行改进, 得到一种对数加速的固定时间收敛激活函数 $\phi_2(x)$ 。

$$\phi_2(x) = (1 + x^2)(1 + \mu \arctan|x|)\text{sgn}(x) \quad (6)$$

其中, 参数 $\mu > 0$ 用于调整收敛速度。将激活函数式(6)代入ZNN模型式(3)中, 在TZNN模型式(5)的基础上得到一种具有对数调节时间的LA-TZNN模型。

$$\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{X}}(t) = -\dot{\mathbf{M}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(t) - \gamma(\mathbf{1} + \mathbf{E}^2(t))(1 + \mu \arctan|\mathbf{E}(t)|)\text{sgn}(\mathbf{E}(t)) \quad (7)$$

所提TZNN模型式(5)和LA-TZNN模型式(7)均具有优越的抗噪能力, 详细证明在第3节中给出。为了更加清楚地观察所提网络的运算流程与结构, 图1绘制了LA-TZNN模型式(7)第 j 列神经元的拓扑结构, 其中, m_{ij} 、 I_{ij} 、 x_{ij} 和 n_{ij} 分别为系数矩阵

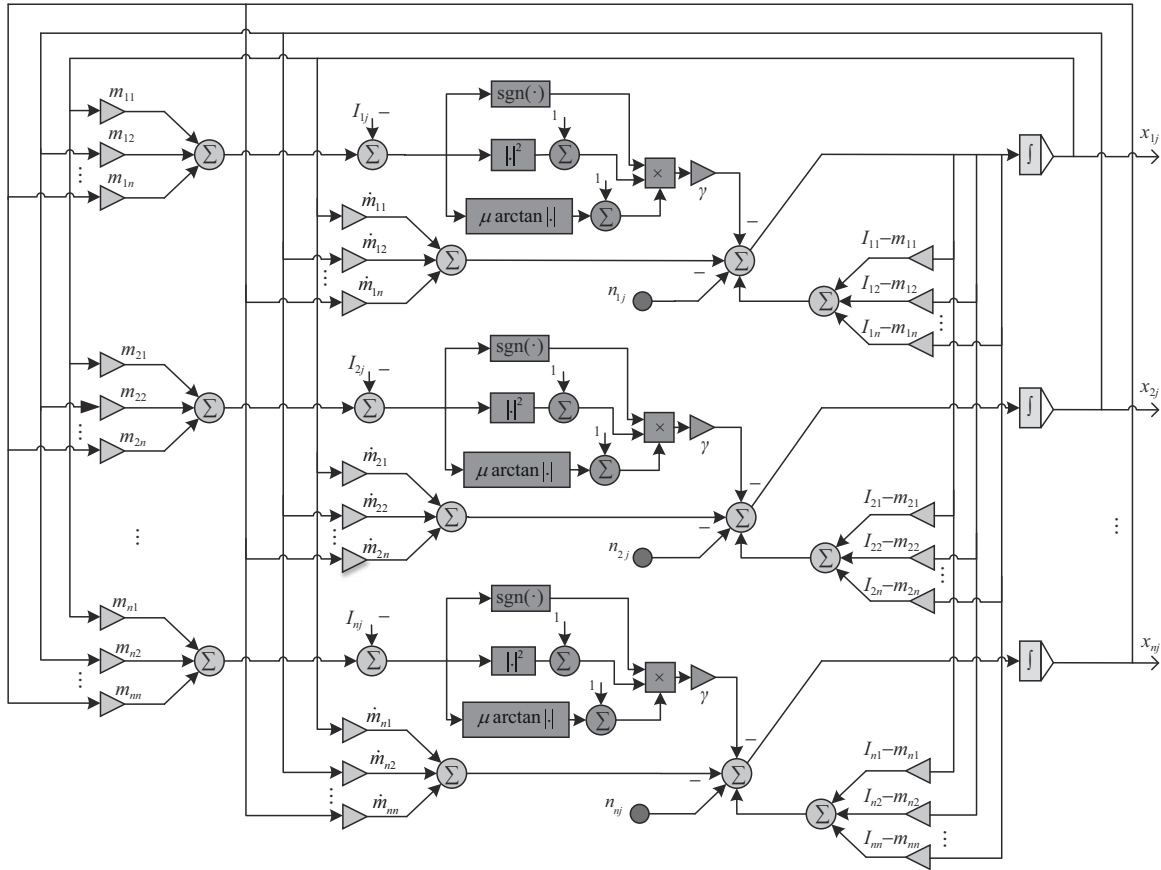


图 1 LA-TZNN 模型式(7)第 j 列神经元的拓扑结构

$\mathbf{M}(t)$ 、单位矩阵 \mathbf{I} 、神经状态 $\mathbf{X}(t)$ 和有界噪声 $\mathbf{N}(t)$ 中第 i, j 个元素, \dot{m}_{ij} 表示 m_{ij} 的导数。当选择参数 $\mu = 0$ 时可得 $1 + \mu \arctan |e_{ij}(t)| = 1$, LA-TZNN 模型式(7)退化为 TZNN 模型式(5), 因此 $\mu > 0$ 是保证对数加速成立的必要条件。

2 鲁棒性分析

为了便于说明, 本节将恒定增益 γ 展开为两部分 $\gamma = \gamma_c + \gamma_r$, 来证明 TZNN 模型式(5)和 LA-TZNN 模型式(7)在受有界噪声 $|\mathbf{N}(t)| \leq \Delta$ 干扰时具有固定时间收敛性, 其中, γ_r 用于抵抗噪声干扰, γ_c 为剩余增益, Δ 表示噪声上界。

2.1 TZNN 模型

定理 1 当增益满足 $\gamma_r \geq \Delta$ 时, 受有界噪声 $|\mathbf{N}(t)| \leq \Delta$ 干扰的 TZNN 模型式(5)用于求解问题式(1)时, 其神经状态 $\mathbf{X}(t)$ 可以收敛至理论解 $\mathbf{X}^*(t)$, 且网络的调节时间 T_1 满足

$$T_1 = T_s(e_{\max}(0)) \quad (8)$$

$$T_s(e_{ij}(0)) \leq \frac{1}{\gamma_c} \arctan |e_{ij}(0)| \quad (9)$$

其中, $e_{\max}(0) = \max |e_{ij}(0)|$ 表示最大初始误差。 T_s 为调节时间存在一个固定时间上界 $T_{\max 1} = \frac{\pi}{2\gamma_c}$, 使得 $T_1 < T_{\max 1}$ 。

证明 构造李雅普诺夫 (Lyapunov) 函数 $V_{ij}(t) = e_{ij}^2(t)$, 并对时间 t 求导可得

$$\dot{V}_{ij}(t) = 2e_{ij}(t)\dot{e}_{ij}(t) \quad (10)$$

将式(4)代入式(1)中, 可得有界噪声干扰的 TZNN 模型式(5)误差动态方程的分量形式为

$$\dot{e}_{ij}(t) = -(\gamma_c + \gamma_r)(1 + e_{ij}^2(t))\text{sgn}(e_{ij}(t)) + n_{ij}(t) \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)中可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ij} &= 2e_{ij} \left[-(\gamma_c + \gamma_r)(1 + e_{ij}^2)\text{sgn}(e_{ij}) + n_{ij} \right] \leq \\ &= 2e_{ij} \left[-\gamma_c(1 + e_{ij}^2)\text{sgn}(e_{ij}) - \gamma_r \text{sgn}(e_{ij}) + n_{ij} \right] = \\ &= -2\gamma_c(1 + e_{ij}^2)e_{ij} \text{sgn}(e_{ij}) + 2e_{ij} [n_{ij} - \gamma_r \text{sgn}(e_{ij})] \quad (12) \end{aligned}$$

当增益满足 $\gamma_r \geq \Delta$ 时, 不等式

$$e_{ij}(t) [n_{ij}(t) - \gamma_r \text{sgn}(e_{ij}(t))] \leq 0 \quad (13)$$

恒成立, 那么 $\dot{V}_{ij}(t)$ 可进一步化为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ij}(t) \leq & -2\gamma_c(1 + e_{ij}^2(t))e_{ij}(t) \operatorname{sgn}(e_{ij}(t)) = \\ & -2\gamma_c(1 + V_{ij}(t))\sqrt{V_{ij}(t)} \end{aligned} \quad (14)$$

通过化简可得

$$dt \leq \frac{dV_{ij}(t)}{-2\gamma_c(1 + V_{ij}(t))\sqrt{V_{ij}(t)}} \quad (15)$$

对式(15)两端分别积分(左边从0到 T_s , 右边从 $V_{ij}(0)$ 到0), 求得调节时间为

$$\begin{aligned} T_s(e_{ij}(0)) & \leq \int_{V_{ij}(0)}^0 \frac{dV_{ij}(t)}{-2\gamma_c(1 + V_{ij}(t))\sqrt{V_{ij}(t)}} = \\ & \frac{1}{\gamma_c} \int_0^{V_{ij}(0)} \frac{d\sqrt{V_{ij}(t)}}{(1 + V_{ij}(t))} = \frac{1}{\gamma_c} \arctan \sqrt{V_{ij}(0)} = \\ & \frac{1}{\gamma_c} \arctan |e_{ij}(0)| \end{aligned} \quad (16)$$

因此初始误差分量 $e_{ij}(0)$ 收敛至零所需时间为 $T_s(e_{ij}(0))$ 。当最大初始误差分量 $e_{\max}(0)$ 收敛后, 神经状态 $\mathbf{X}(t)$ 收敛至理论解 $\mathbf{X}^*(t)$, 故TZNN模型式(5)的调节时间 T_1 为

$$T_1 = T_s(e_{\max}(0)) \quad (17)$$

式(8)得证, 且由于 $0 \leq \arctan |e_{ij}(0)| < \frac{\pi}{2}$, 则TZNN模型式(5)的调节时间 T_1 总满足

$$T_1 \leq \frac{1}{\gamma_c} \arctan |e_{\max}(0)| < \frac{\pi}{2\gamma_c} = T_{\max 1} \quad (18)$$

因此使用TZNN模型式(5)计算问题式(1)时, 即使受到有界噪声干扰, 误差仍能收敛至零, 且调节时间 T_1 存在一个与初始误差无关的上界 $T_{\max 1}$, 即固定时间稳定性。在无噪声环境, 通过类似推导^[34]可知TZNN模型式(5)的调节时间 T_2 及其上界 $T_{\max 2}$ 满足以下条件

$$T_2 = \frac{1}{\gamma} \arctan |e_{\max}(0)| < \frac{\pi}{2\gamma} = T_{\max 2} \quad (19)$$

证毕。

2.2 LA-TZNN模型

定理2 当增益 $\gamma_r \geq \Delta$ 时, 受有界噪声 $|\mathbf{N}(t)| \leq \Delta$ 干扰的LA-TZNN模型式(7)在计算问题式(1)时, 其神经状态 $\mathbf{X}(t)$ 可以收敛至理论解 $\mathbf{X}^*(t)$, 且调节时间 T_3 满足

$$T_3 = T_s(e_{\max}(0)) \quad (20)$$

$$T_s(e_{ij}(0)) \leq \frac{1}{\mu\gamma_c} \ln \left(1 + \mu \arctan |e_{ij}(0)| \right) \quad (21)$$

存在一个固定时间上界 $T_{\max 3} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\pi}{2} \mu \right)}{\mu\gamma_c}$,

使得 $T_3 < T_{\max 3}$ 成立。

证明 构造Lyapunov函数 $V_{ij}(t) = e_{ij}^2(t)$, 对时间求导可得 $\dot{V}_{ij}(t) = 2e_{ij}(t)\dot{e}_{ij}(t)$, 将式(6)代入式(2)中, 可得受有界噪声 $n_{ij}(t)$ 干扰的LA-TZNN模型式(7)误差动态分量为

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ij} = & -(\gamma_c + \gamma_r)(1 + e_{ij}^2) \cdot \\ & (1 + \mu \arctan |e_{ij}|) \operatorname{sgn}(e_{ij}) + n_{ij} \end{aligned} \quad (22)$$

将式(22)代入式(10)中, 参考定理1推导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ij} \leq & -2\gamma_c(1 + e_{ij}^2)(1 + \mu \arctan |e_{ij}|) \cdot \\ & e_{ij} \operatorname{sgn}(e_{ij}) + 2e_{ij}[n_{ij} - \gamma_r \operatorname{sgn}(e_{ij})] \end{aligned} \quad (23)$$

当增益满足 $\gamma_r \geq \Delta$ 时, 有不等式

$$e_{ij}(t)[n_{ij}(t) - \gamma_r \operatorname{sgn}(e_{ij}(t))] \leq 0 \quad (24)$$

恒成立, 那么 $\dot{V}_{ij}(t)$ 可进一步化为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ij}(t) \leq & -2\gamma_c(1 + V_{ij}(t)) \cdot \\ & (1 + \mu \arctan \sqrt{V_{ij}(t)})\sqrt{V_{ij}(t)} \end{aligned} \quad (25)$$

通过求解微分不等式(25)可得

$$\begin{aligned} T_s(e_{ij}(0)) & \leq \int_{V_{ij}(0)}^0 \frac{dV_{ij}(t)}{-2\gamma_c(1 + V_{ij}(t))(1 + \mu \arctan \sqrt{V_{ij}(t)})\sqrt{V_{ij}(t)}} = \\ & \frac{1}{\mu\gamma_c} \int_0^{V_{ij}(0)} d \ln(1 + \mu \arctan \sqrt{V_{ij}(t)}) = \\ & \frac{1}{\mu\gamma_c} \ln(1 + \mu \arctan \sqrt{V_{ij}(0)}) = \\ & \frac{1}{\mu\gamma_c} \ln(1 + \mu \arctan |e_{ij}(0)|) \end{aligned} \quad (26)$$

当所有误差分量 $e_{ij}(t)$ 均收敛至零后, 神经状态 $\mathbf{X}(t)$ 收敛到理论解 $\mathbf{X}^*(t)$, 故LA-TZNN模型式(7)的调节时间为 $T_3 = T_s(e_{\max}(0))$, 式(20)得证。由于 $0 \leq \arctan |e_{ij}(0)| < \frac{\pi}{2}$, 则LA-TZNN模型式(7)的调节时间 T_3 总满足

$$T_3 \leq \frac{1}{\mu\gamma_c} \ln(1 + \mu \arctan |e_{\max}(0)|) < \frac{1}{\mu\gamma_c} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2} \mu\right) = T_{\max 3} \quad (27)$$

因此, 使用 LA-TZNN 模型式(7)求解问题式(1)时, 即使受到有界噪声干扰, 误差仍能收敛至零, 且调节时间 T_3 同样也存在一个与初始误差无关的上界 $T_{\max 3}$, 即固定时间稳定性。在理想无噪环境下, 通过类似推导^[34], 可知 LA-TZNN 模型式(7)的调节时间 T_4 及其上界 $T_{\max 4}$ 满足

$$T_4 = \frac{1}{\mu\gamma} \ln(1 + \mu \arctan |e_{\max}(0)|) < \frac{1}{\mu\gamma} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2} \mu\right) = T_{\max 4} \quad (28)$$

综上所述, TZNN 模型式(5)和 LA-TZNN 模型式(7)在求解问题式(1)时, 不论是否存在噪声干扰, 均能实现固定时间稳定, 调节时间上界依次由 $T_{\max 1,2,3,4}$ 给出。注意 $T_{\max 1}$ 式(18)和 $T_{\max 3}$ 式(27), 由于不等式 $x \geq \frac{\ln(1 + \mu x)}{\mu}$ 对于 $x > 0$ 恒成立, 则 $T_{\max 1} \geq T_{\max 3}$ 对于任意初始误差恒成立, 且 LA-TZNN 模型式(7)实现了对数调节时间收敛, 故称其为 TZNN 模型式(5)的对数加速形式。证毕。

此外, 通过观察 TZNN 模型式(5)在无噪声和有界噪声环境下的调节时间上界, 即式(18)和式(19), 由于 $\gamma = \gamma_c + \gamma_r$ 可知, $T_{\max 1} > T_{\max 2}$ 。换言之, TZNN 模型受到外部噪声干扰, 为使各神经状态可正常收敛, 需从恒定增益 γ 中分出部分 $\gamma_r \geq \Delta$ 用以补偿噪声影响, 一般取最小值 $\gamma_r = \Delta$ 即可, 这导致实际用于误差下降的 $\gamma_c = \gamma - \Delta$ 相应减少, 故相较于无噪声环境, 需要更长的时间使误差归零, 即 $T_{\max 1} > T_{\max 2}$, 同理对于 LA-TZNN 模型式(7)可知 $T_{\max 3} > T_{\max 4}$ 。因此在使用 TZNN 模型和 LA-TZNN 模型前, 应尽量保证恒定增益 γ 足够大, 既可满足抗噪需求, 也可使误差快速下降。最后, 由 $T_{\max 1}$ 式(18)和 $T_{\max 3}$ 式(27)可知增益 γ_c 越大, 调节时间越短, 收敛速度越快; 由定理 1 和定理 2 的条件 $\gamma_r \geq \Delta \geq |N(t)|$ 可知, 增益 γ_r 越大, 能够抵抗的噪声上界越大, 模型鲁棒性越好。

3 预定义时间 TZNN 模型设计

在实际工程计算中, 由于初始误差并非无穷大

而是在一个有限区域内变化, 这导致实际调节时间 $T_{1,2,3,4}$ 与收敛上界 $T_{\max 1,2,3,4}$ 差距过大, 进一步减小调节时间上界的估计显得尤为重要。因此, 本节给出了所提模型在半全局意义下的固定时间稳定性结果, 以提升模型的计算精度。

3.1 半全局调节时间上界

对于指定参数 $\varpi > 0$, 设区域 $\mathcal{S} = [-\varpi, \varpi]$, 当所有初始误差均满足 $|e_{ij}(0)| \leq \varpi$, 即 $e_{ij}(0) \in \mathcal{S}$, 以下定理总结了所提模型在半全局意义下的固定时间稳定性结果。

定理 3 当神经初态 $\mathbf{X}(0)$ 满足 $|e_{ij}(0)| \leq \varpi$, 受有界噪声干扰的 TZNN 模型式(5)和 LA-TZNN 模型式(7)均具有半全局固定时间稳定性, 对应的最小调节时间上界 t_{g1}, t_{g2} 满足

$$t_{g1}(\varpi) = \frac{1}{\gamma_c} \arctan(\varpi) < T_{\max 1} \quad (29)$$

$$t_{g2}(\varpi) = \frac{1}{\mu\gamma_c} \ln(1 + \mu \arctan(\varpi)) < T_{\max 3} \quad (30)$$

证明 定理 1 和定理 2 分别推导了 TZNN 模型式(5)和 LA-TZNN 模型式(7)的调节时间及其上界, 当每个初始误差均满足 $|e_{ij}(0)| \leq \varpi$ 时, 依次由式(18)和式(27)可得 TZNN 模型和 LA-TZNN 模型的半全局最小调节时间上界, 即式(29)和式(30)。在半全局意义上的调节时间上界更接近模型的实际调节时间, 进一步降低了估计的保守性。证毕。

3.2 半全局预定义时间 TZNN 模型

为了实现预定义时间收敛, 对所提模型的误差动态式(2)进行修改。

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = -\gamma \Phi_f(\mathbf{E}(t)) + \mathbf{N}(t) \quad (31)$$

其中, $\Phi_f(\mathbf{E}(t)) = \frac{t_g(\varpi)}{t_f} \Phi(\mathbf{E}(t))$, $t_g(\varpi)$ 表示 TZNN 模型或 LA-TZNN 模型的最小调节时间上界, 即式(29)或式(30), t_f 表示一个可调参数可被提前设定。代入误差函数可得半全局意义上具有预定义时间收敛性的 TZNN 模型和 LA-TZNN 模型分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) \dot{\mathbf{X}}(t) &= -\dot{\mathbf{M}}(t) \mathbf{X}(t) + \\ &\mathbf{N}(t) - \gamma \frac{t_{g1}(\varpi)}{t_f} \Phi_1(\mathbf{E}(t)) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{X}}(t) &= -\mathbf{M}(t)\mathbf{X}(t) + \\ \mathbf{N}(t) - \gamma \frac{t_{g2}(\varpi)}{t_f} \boldsymbol{\Phi}_2(\mathbf{E}(t)) \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $\boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{E}(t))$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2(\mathbf{E}(t))$ 分别是由固定时间激活函数 $\phi_1(\cdot)$ 和 $\phi_2(\cdot)$ 组成的矩阵。

定理 4 当神经初态 $\mathbf{X}(0)$ 满足 $|e_{ij}(0)| \leq \varpi$, TZNN 模型式(32)和 LA-TZNN 模型式(33)可以实现预定义时间稳定, 即神经状态 $\mathbf{X}(t)$ 在预定时间 t_f 内收敛至理论解 $\mathbf{X}^*(t)$ 。

证明 以 TZNN 模型式(32)为例, 与定理 1 中的推导类似, 通过化简可得

$$T_s(e_{ij}(0)) \leq \frac{t_f}{\gamma_c t_{g1}(\varpi)} \arctan |e_{ij}(0)| \quad (34)$$

由式(29)可知 $t_{g1}(\varpi) \geq \frac{\arctan |e_{ij}(0)|}{\gamma_c}$, 故式(34)

可表示为

$$T_s(e_{ij}(0)) \leq t_f \quad (35)$$

TZNN 模型式(32)的调节时间 T_5 满足

$$T_5 = \left\{ T_s(e_{\max}(0)) \mid e_{ij}(0) \in \mathcal{S} \right\} \leq t_f \quad (36)$$

同理, 推导可知 LA-TZNN 模型式(33)的调节时间 T_6 满足

$$T_6 \leq t_f \quad (37)$$

综上所述, TZNN 模型式(32)和 LA-TZNN 模型式(33)具有半全局意义上的预定义时间稳定性, 可通过调整参数 t_f 的值提前设定调节时间上界。此外, 相较于在全局意义上构造预定义时间 ZNN 模型, 由于采用的是最小调节时间上界 $t_{g1,2}(\varpi)$ 更接近实际调节时间, 使得到的模型预定义精度更高。证毕。

4 数值仿真

本节针对时变矩阵求逆问题式(1), 通过仿真进一步验证所提模型的有效性和优越性, 其中涉及的 ZNN 模型和激活函数如表 1 所示。

4.1 无噪声环境

首先验证 TZNN 模型式(5)和 LA-TZNN 模型式(7)在无噪声环境中计算时变矩阵求逆的固定时间稳定性, 考虑问题中的参数和神经初态如式(38)所示。

表 1 仿真使用的 ZNN 模型和激活函数

组别	ZNN 模型	激活函数形式
	ZNN	$\phi(x) = x$
对照组	PSZNN (power-sigmoid ZNN)	$\phi(x) = \begin{cases} x^r, & x \geq 1 \\ \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}, & x < 1 \end{cases}$
	SBPZNN (sign-bi-power ZNN)	$\phi(x) = \frac{1}{2} \left(x ^\beta + x ^\beta \right) \text{sgn}(x)$
实验组	TZNN 模型式 (5)	$\phi_1(x) = (1 + x^2) \text{sgn}(x)$
	LA-TZNN 模型式 (7)	$\phi_2(x) = (1 + x^2)(1 + \mu \arctan x) \text{sgn}(x)$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) &= \begin{bmatrix} 0.5\sin(t) + 2 & \cos(t) \\ \cos(t) & 0.5\cos(t) + 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

设置增益 $\gamma = 1$ 、参数 $\mu = 1$ 和噪声 $\mathbf{N}(t) = 0$, 可求得 TZNN 模型式(5)和 LA-TZNN 模型式(7)的调节时间上界分别为 $T_{\max 2} = 1.571 \text{ s}$ 和 $T_{\max 4} = 0.944 \text{ s}$ 。2 种模型求解问题式(1)的神经状态曲线如图 2 所示, 其中, 黑色实线表示理论解 $\mathbf{X}^*(t) = \mathbf{M}^{-1}(t)$, 灰色虚线和点划线分别表示 2 种模型求得的神经状态, 调节时间上界用菱形和正方形标注。显然, 对于一个相对较大的初始误差 $\mathbf{E}(0)$, 2 种模型均能在各自调节时间上界 $T_{\max 2,4}$ 内收敛至理论解并保持稳定, 验证了所提方法在理想环境中的固定时间稳定性。此外通过观察神经状态可知, 相较于 TZNN 模型式(5), LA-TZNN 模型式(7)在相同条件下收敛速度更快。

为了进一步比较所提模型的收敛性能, 定义瞬态误差指标 $J_E = \|\mathbf{E}(t)\|_F = \|\mathbf{M}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{I}\|_F$ 。图 3 给出无噪声环境下基于不同增益 γ 的 TZNN 模型式(5)和 LA-TZNN 模型式(7)求解问题式(1)的瞬态误差曲线, 黑色实线和灰色实线分别表示 TZNN 模型式(5)和 LA-TZNN 模型式(7)。由图 3 可知, 随着恒定增益 γ 增大, 2 种模型的调节时间均逐渐减小, 从图 3 的子图可知, 所有瞬态误差精度均可达 10^{-4} 级左右。且在相同初始条件下, LA-TZNN 模型的收敛速度始终快于 TZNN 模型, 进一步验证了 LA-TZNN 模型是 TZNN 模型的一种加速形式。

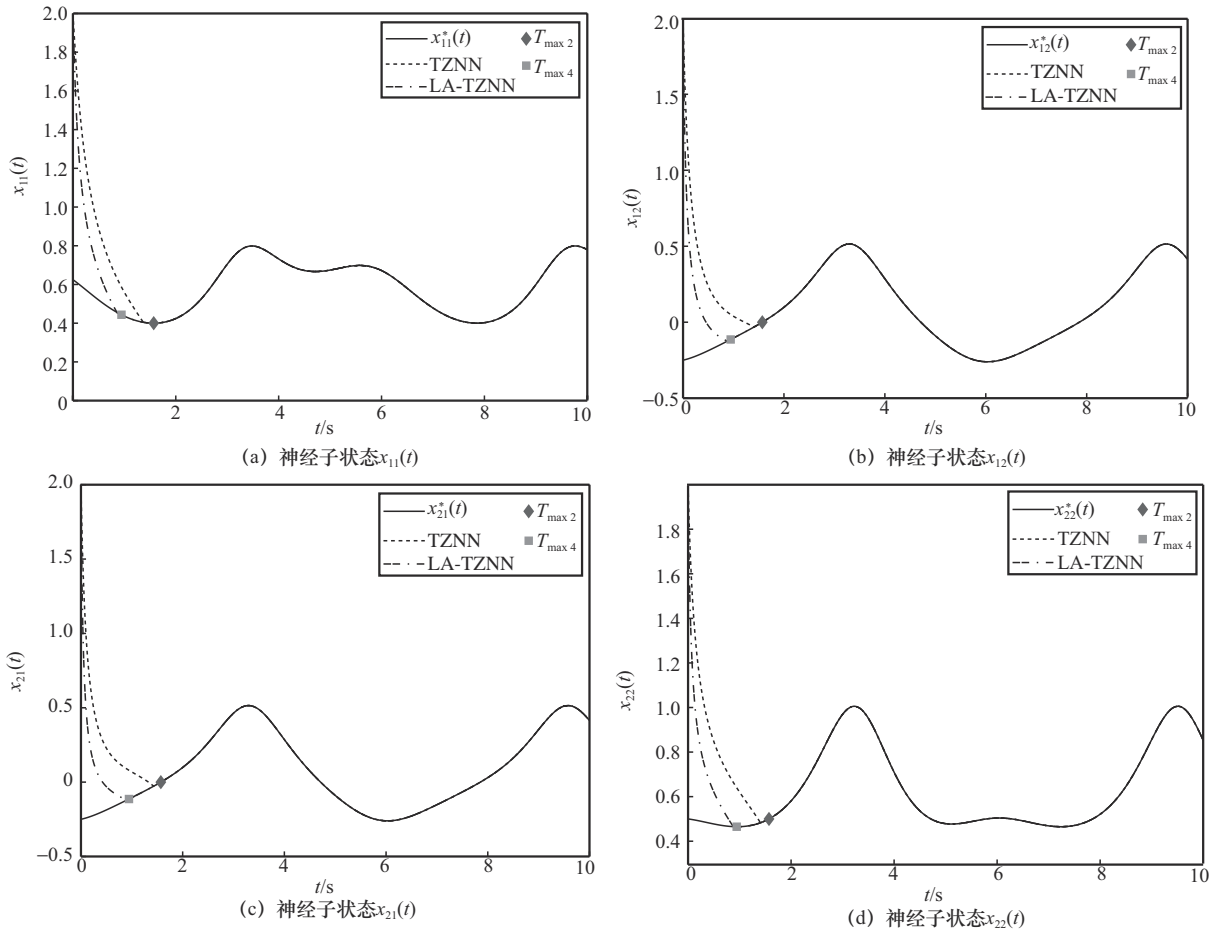


图2 无噪声环境下TZNN模型式(5)和LA-TZNN模型式(7)求解问题式(1)的神经状态曲线

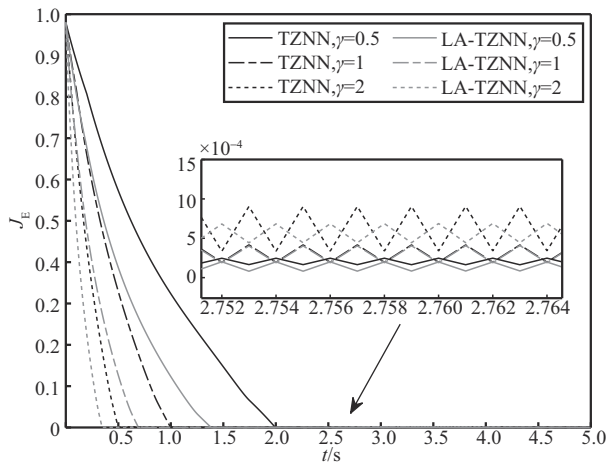


图3 无噪声环境下基于不同增益 γ 的TZNN模型式(5)和LA-TZNN模型式(7)求解问题式(1)的瞬态误差曲线

4.2 有界噪声干扰环境

在实际工业应用中，外部噪声干扰可能会导致系统无法正常运行，故加强鲁棒性是设计模型时需要重点考虑的一环。为了验证增益大小对所提模型的抗噪能力和收敛速度的影响，此处分别在余弦噪声 $N(t) =$

$\cos(t)$ 和三角波噪声 $N(t) = \text{sawtooth}(2\pi t)$ 干扰环境下，使用TZNN模型式(5)和LA-TZNN模型式(7)计算时变矩阵求逆问题式(1)，其中噪声上界为 $\Delta = 1$ ，恒定增益依次取值为 $\gamma = \{0.75, 1, 2\}$ ，瞬态误差曲线如图4和图5所示。根据第2节分析，可得以下结论。

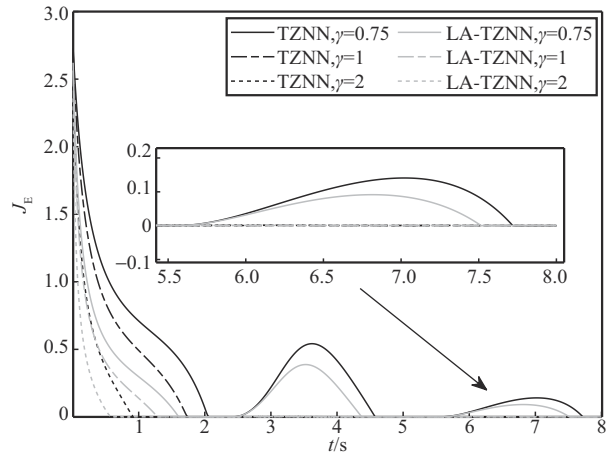


图4 余弦噪声干扰环境下基于不同增益 γ 的TZNN模型式(5)和LA-TZNN模型式(7)求解问题式(1)的瞬态误差曲线

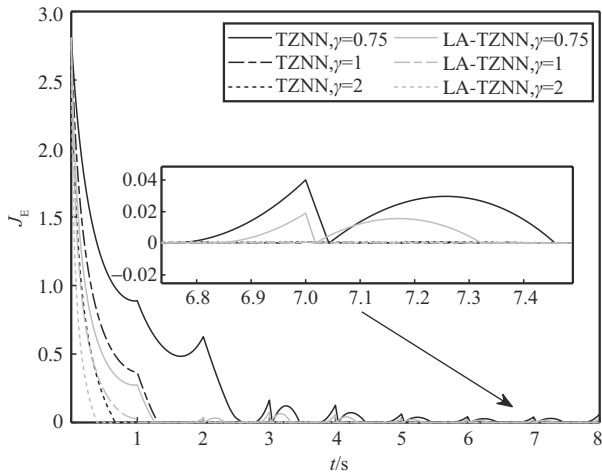


图5 三角波噪声干扰环境下基于不同增益 γ 的TZNN模型式(5)和LA-TZNN模型式(7)求解问题式(1)的瞬态误差曲线

1) 当增益无法满足补偿噪声影响的分配需求时, 即 $\gamma < \Delta$, 模型无法正常收敛。

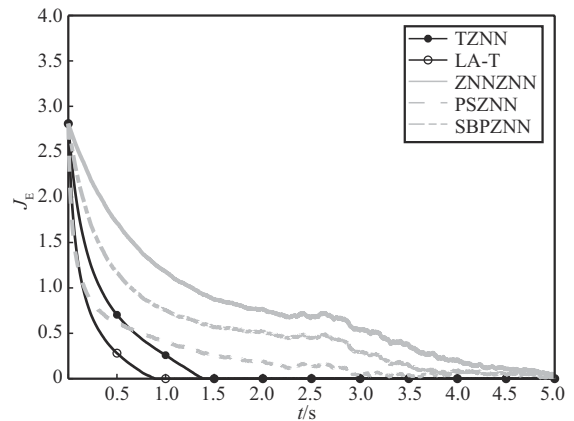
2) 当增益 $\gamma \geq \Delta$ 时, 2种模型可以完成收敛, 且增益越大, 模型所需的调节时间越短。

如图4和图5所示, 当增益取 $\gamma = 0.75 < \Delta$ 时, TZNN模型和LA-TZNN模型均无法收敛, 始终存在瞬态误差波动。当增益增大至 $\gamma = 1$, 满足增益分配需求, 2种模型均可收敛并保持稳定直至结束, 进一步验证了所提模型在有界噪声干扰环境中的鲁棒性。此外, 随着增益继续增大至 $\gamma = 2$, 2种模型的收敛速度加快, 所需调节时间变短, 与上述分析一致。值得一提的是, 在相同条件下, LA-TZNN模型式(7)的调节时间相较于TZNN模型式(5)更短, 再次验证了所提对数加速方法的可行性。

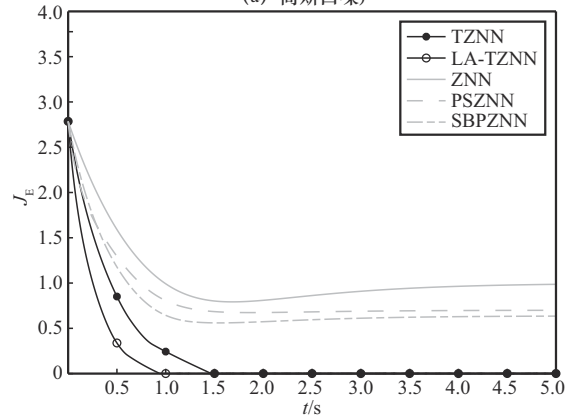
为了比较说明所提TZNN模型和LA-TZNN模型的优越性能, 图6绘制了3种有界噪声干扰下不同ZNN模型求解问题式(1)的瞬态误差曲线, 其中对照组模型结构可由其激活函数(在表1中列出)与式(3)合并得到。从图6可知, 相较于传统的ZNN, PSZNN和SBPZNN模型, 提出的TZNN模型式(5)和LA-TZNN模型式(7)能够有效抑制有界噪声干扰, 鲁棒性能更强, 且收敛速度更快, 所需调节时间更短, 进一步验证了所提方法的可行性和优越性。此外, 再次验证了LA-TZNN模型是TZNN模型的加速形式。

最后, 对第3节改进得到的TZNN模型式(32)和LA-TZNN模型式(33)的半全局预定义时间稳定性进行仿真。由图7可知, 在半全局意义上求得的调节时间 $t_{g1,2}(\varpi)$ 相较于全局上界 $T_{\max 1,3}$ 更接近

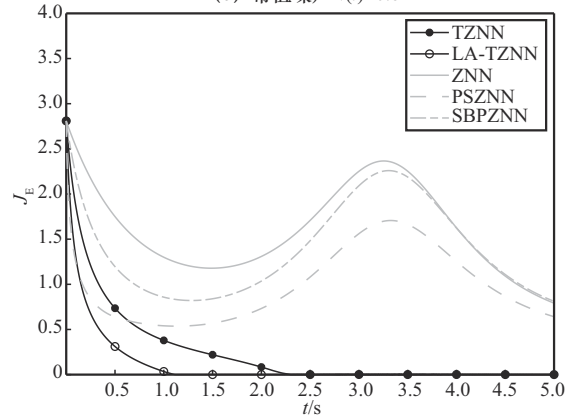
实际调节时间 $T_s(E(0))$, 降低了估计的保守性, 可在构造预定义时间收敛模型时达到更高的预定义精度。图8绘制了基于不同预定义时间 t_f 的半全局预定义TZNN模型式(17)和LA-TZNN模型式(18)求解问题式(1)的瞬态误差曲线, 其中 t_f 是可调参数, 其值对应预先设定的调节时间上界, 实际调节时间用星号标出。从图8可以看到, 实际调节时间非常接近且始终短于预定义时间 t_f , 验证了2种所提预定义模型的可行性。



(a) 高斯白噪声



(b) 常值噪声 $N(t)=0.8$



(c) 负指数噪声 $N(t)=1-e^{-t}$

图6 3种有界噪声干扰下不同ZNN模型求解问题式(1)的瞬态误差曲线

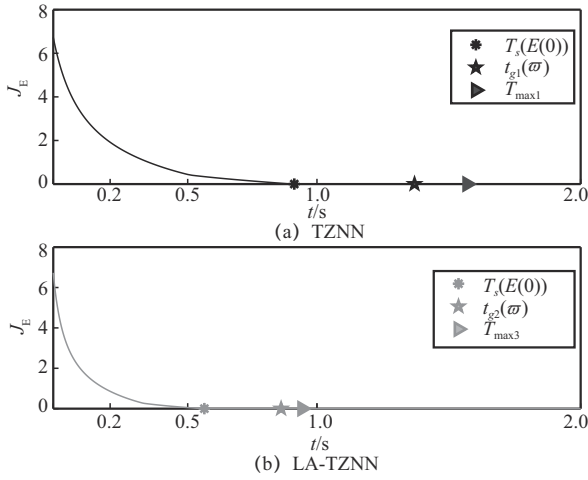


图7 TZNN模型式(5)和LA-TZNN模型式(7)的调节时间上界比较

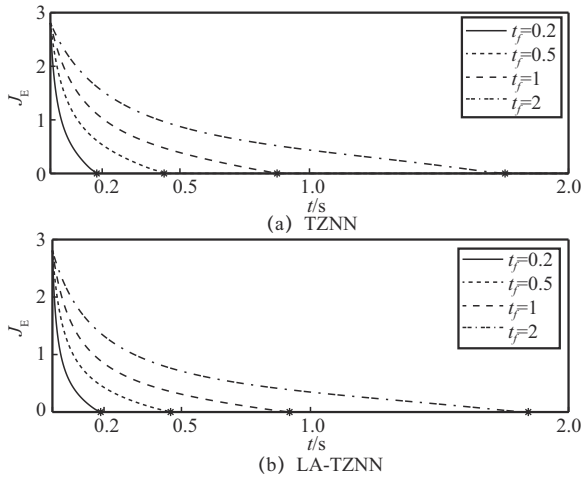


图8 基于不同预定义时间 t_f 的半全局预定义TZNN模型式(32)和LA-TZNN模型式(33)求解问题式(1)的瞬态误差曲线

5 PUMA560机械臂重复运动规划

机械臂末端执行器位置和速度的运动学方程表示为 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}(t))$ 和 $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}(t))\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$, 其中, $\mathbf{r}(t)$ 和 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 分别表示末端执行器的位置向量和速度向量, $\boldsymbol{\theta}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ 分别是关节角向量和关节角速度向量, $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}(t))$ 表示关节角的雅可比矩阵, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}(t))$ 是关于关节角 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 的光滑非线性映射。考虑到关节角漂移问题, 考虑以下机械臂重复运动规划方案

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T(t) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{P}_0^T(t) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ \text{s.t.} & \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}(t)) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_d(t) + \mathbf{P}_c(t) \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $\mathbf{P}_0(t) = \alpha(\boldsymbol{\theta}(t) - \boldsymbol{\theta}_d(0))$ 表示机械臂的末端执行器完成一个工作轨迹后回到期望初始角并实现可重复运动, $\mathbf{P}_c(t) = \beta(\mathbf{r}_d(t) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}(t)))$ 设定了期望运动轨迹, $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$ 是调节参数, $\boldsymbol{\theta}_d(0)$ 表

示期望的初始关节角位置向量, $\mathbf{r}_d(t)$ 和 $\dot{\mathbf{r}}_d(t)$ 表示末端执行器的期望轨迹和期望速度向量。为了求解上述时变二次规划问题, 引入拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}(t)$, 可得拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L(\dot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\lambda}, t) = & \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T(t) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{P}_0^T(t) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \\ & \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}(t)) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \dot{\mathbf{r}}_d(t) - \mathbf{P}_c(t)] \end{aligned} \quad (40)$$

式(40)对 $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 求偏导并令其为零可得

$$\mathbf{W}(t) \mathbf{Y}(t) = \mathbf{V}(t) \quad (41)$$

其中, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) = & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J}^T(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}(t) = & \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_0(t) \\ \dot{\mathbf{r}}_d(t) + \mathbf{P}_c(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

通过构造误差函数 $\mathbf{E}(t) = \mathbf{W}(t) \mathbf{Y}(t) - \mathbf{V}(t)$, 最终可以得到用于求解受噪声干扰的机械臂重复运动规划的TZNN模型和LA-TZNN模型。

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) \dot{\mathbf{Y}}(t) = & -\dot{\mathbf{W}}(t) \mathbf{Y}(t) + \dot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{N}(t) - \\ & \gamma(\mathbf{1} + \mathbf{E}^2(t)) \text{sgn}(\mathbf{E}(t)) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) \dot{\mathbf{Y}}(t) = & -\dot{\mathbf{W}}(t) \mathbf{Y}(t) + \dot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{N}(t) - \\ & \gamma(\mathbf{1} + \mathbf{E}^2(t)) (\mathbf{1} + \mu \arctan|\mathbf{E}(t)|) \text{sgn}(\mathbf{E}(t)) \end{aligned} \quad (44)$$

使用线性激活函数 $\phi(x) = x$ 激活的ZNN模型进行对比实验。

$$\mathbf{W}(t) \dot{\mathbf{Y}}(t) = -\dot{\mathbf{W}}(t) \mathbf{Y}(t) + \dot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{N}(t) - \gamma \mathbf{E}(t) \quad (45)$$

本节使用TZNN模型式(43)、LA-TZNN模型式(44)和ZNN模型式(45)对受有界噪声干扰的PUMA560机械臂重复运动规划问题进行求解, 以验证所提模型的优越性。考虑到机械臂的初始位置可能不在期望运动轨迹上, 首先设置末端执行器的期望初始角度 $\boldsymbol{\theta}_d(0)$ 和实际初始位置 $\boldsymbol{\theta}(0)$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_d(0) = & [0.25 \ -1 \ -0.3 \ 1.5 \ -0.6 \ 0]^T \\ \boldsymbol{\theta}(0) = & [0.25 \ -1.2 \ -0.3 \ 1.5 \ -0.8 \ 0]^T \end{aligned} \quad (46)$$

仿真中选择余弦噪声干扰 $n_{ij}(t) = \cos(t)$, 模型参数设置为 $\gamma = \mu = 1$, 期望运动轨迹为李萨如(Lissajous)曲线。图9给出了TZNN模型式(43)求解带初始位置偏差的PUMA560机械臂重复运动规划问题时各关节的运动轨迹, 其中灰色虚线表示设定的期望轨迹, 黑色实线表示各关节实际轨迹。可以看到, 末端执行器可实现从初始位置出发, 逐渐到达期望轨迹, 并完成一周期封闭任务, 验证了该方法的有效性。

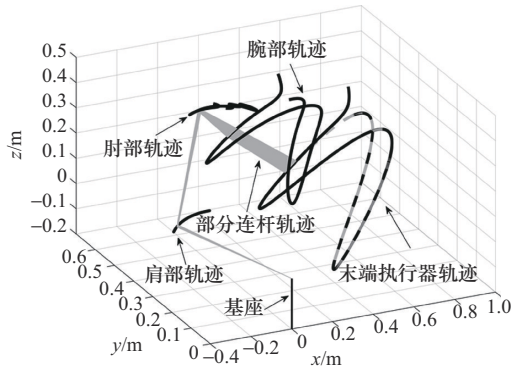
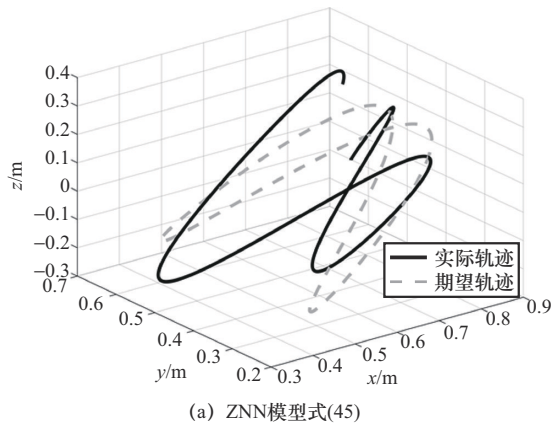
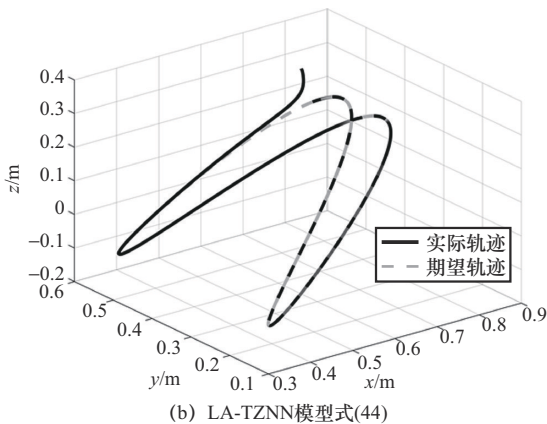


图9 TZNN模型式(43)求解带初始位置偏差的PUMA560机械臂重复运动规划问题时各关节的运动轨迹

为了说明所提模型的鲁棒性, 给出传统带线性激活函数的ZNN模型式(45)求解上述问题的末端执行器轨迹, 如图10(a)所示, 当受到外部噪声干扰时, ZNN模型式(45)求解得到的末端执行器实际轨迹会受到很大的影响, 导致无法顺利完成轨迹跟踪任务。然而, 图10(b)中的LA-TZNN模型式(44)在相同条件下仍能较好地跟踪期望轨迹, 进一步验证了所提方法的优越性。



(a) ZNN模型式(45)

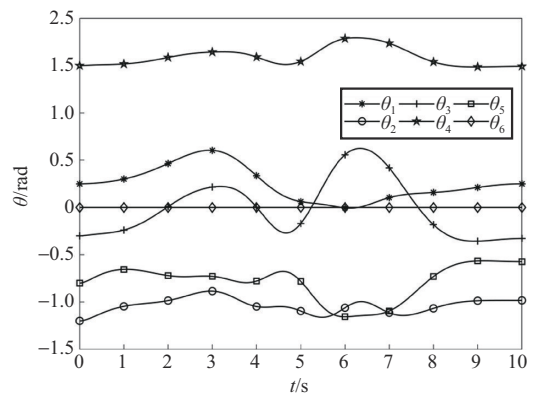


(b) LA-TZNN模型式(44)

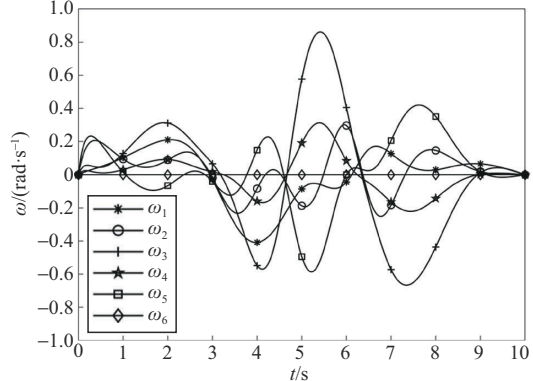
图10 末端执行器实际轨迹与期望轨迹

此外, 图11给出了LA-TZNN模型式(44)受外部噪声 $n_{ij}(t) = \cos(t)$ 影响下求解PUMA560机械臂重

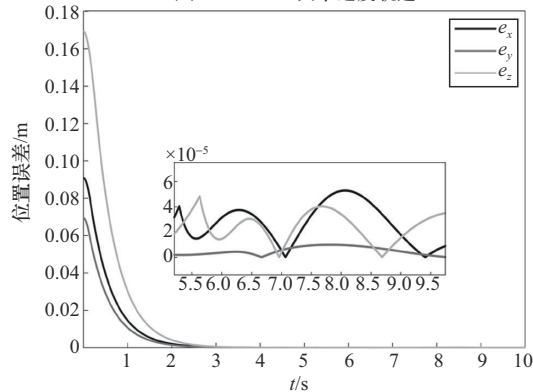
复运动规划问题时末端执行器的各种参数变化曲线, 如图11(a)所示, 各个关节角度从设置的初始位置 $\theta(0)$ 出发, 并在最后返回到期望的初始位置 $\theta_d(0)$, 实现可重复运动。并且从图11(a)和图11(b)可知, 所有关节角度和关节速度都是连续且光滑的, 这在实际机械臂上可得到复现, 再次验证了所提模型的有效性。图11(c)给出了末端执行器在笛卡儿坐标系下的位置误差分量 e_x 、 e_y 和 e_z , 可以看到末端执行器的位置误差最大值很小, 可达到 10^{-5} 的数量级。综上所述, 所提2种模型均可用于机械臂求解重复运动规划问题, 且均有优越的性能。



(a) PUMA560关节角轨迹



(b) PUMA560关节速度轨迹



(c) PUMA560末端执行器位置误差

图11 LA-TZNN模型式(44)求解PUMA560机械臂重复运动规划结果

6 结束语

本文对传统 ZNN 做出改进, 提出一类具有抗噪能力的终端零化神经网络, 在求解时变问题时具有优越的鲁棒性。对误差动态进行了严谨的理论分析, 验证了所提模型在外部噪声干扰下具有固定时间稳定性, 并分析了增益对收敛性能的影响。给出半全局意义上的收敛时间上界, 通过修改增益形式, 使模型可以在预定义时间内完成收敛。最后将所提网络应用于时变矩阵求逆和冗余机械臂重复运动规划问题, 仿真结果验证了所提方法的有效性。考虑到实际应用中可能需要设定收敛时间, 未来应侧重于实现设定时间收敛。

参考文献:

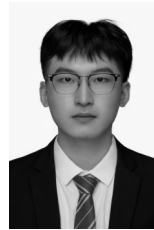
- [1] MARCOS M D G, MACHADO J A T, AZEVEDO-PERDICOÚLIS T P. A multi-objective approach for the motion planning of redundant manipulators[J]. *Applied Soft Computing*, 2012, 12(2): 589-599.
- [2] ZHU W P, AHMAD M O, SWAMY M N S. Weighted least-square design of FIR filters using a fast iterative matrix inversion algorithm[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(11): 1620-1628.
- [3] NAZEMI A, NAZEMI M. A gradient-based neural network method for solving strictly convex quadratic programming problems[J]. *Cognitive Computation*, 2014, 6(3): 484-495.
- [4] ZHANG Y N, GE S S. Design and analysis of a general recurrent neural network model for time-varying matrix inversion[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2005, 16(6): 1477-1490.
- [5] GUO D S, YI C F, ZHANG Y N. Zhang neural network versus gradient-based neural network for time-varying linear matrix equation solving[J]. *Neurocomputing*, 2011, 74(17): 3708-3712.
- [6] MIAO P, ZHENG Y H, LI S. A new FXTZNN model for solving TVCS equation and application to pseudo-inverse of a matrix[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2024, 465: 128409.
- [7] XIAO L, TAO J, LI W B. An arctan-type varying-parameter ZNN for solving time-varying complex sylvester equations in finite time[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2022, 18(6): 3651-3660.
- [8] ZUO Q Y, LI K L, XIAO L, et al. On generalized zeroing neural network under discrete and distributed time delays and its application to dynamic Lyapunov equation[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(8): 5114-5126.
- [9] JIN J, CHEN W J, CHEN C Y, et al. A predefined fixed-time convergence ZNN and its applications to time-varying quadratic programming solving and dual-arm manipulator cooperative trajectory tracking[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2023, 19(8): 8691-8702.
- [10] DAI L Y, ZHANG Y Y, GENG G G. Norm-based finite-time convergent recurrent neural network for dynamic linear inequality[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2024, 20(3): 4874-4883.
- [11] ZHANG Y N, LI W B, ZHANG Z J. Physical-limits-constrained minimum velocity norm coordinating scheme for wheeled mobile redundant manipulators[J]. *Robotica*, 2015, 33(6): 1325-1350.
- [12] LI W B, MA X, LUO J W, et al. A strictly predefined-time convergent neural solution to equality- and inequality-constrained time-variant quadratic programming[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(7): 4028-4039.
- [13] DAI J H, CAO Y K, XIAO L, et al. Design and analysis of a noise-suppression zeroing neural network approach for robust synchronization of chaotic systems[J]. *Neurocomputing*, 2021, 426(5): 299-308.
- [14] LUO J J, XIAO L, CAO P L, et al. A new class of robust and predefined-time consensus protocol based on noise-tolerant ZNN models[J]. *Applied Soft Computing*, 2023, 145: 110550.
- [15] ZHANG Y N, JIANG D C, WANG J. A recurrent neural network for solving Sylvester equation with time-varying coefficients[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2002, 13(5): 1053-1063.
- [16] XIAO L, JIA L. Zeroing neural networks: finite-time convergence design, analysis and applications[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2022.
- [17] SUN M X, ZHANG Y, WU Y X, et al. On a finitely activated terminal RNN approach to time-variant problem solving[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2022, 33(12): 7289-7302.
- [18] SÁNCHEZ-TORRES J D, SANCHEZ E N, LOUKIANOV A G. Predefined-time stability of dynamical systems with sliding modes[C]// *Proceedings of the 2015 American Control Conference (ACC)*. Piscataway: IEEE Press, 2015: 5842-5846.
- [19] XIAO L, ZHANG Y S, HU Z S, et al. Performance benefits of robust nonlinear zeroing neural network for finding accurate solution of Lyapunov equation in presence of various noises[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 15(9): 5161-5171.
- [20] KONG Y, WU J J, JIANG Y L, et al. Robust terminal recurrent neural network for finding exact solution of the TVQP problem with various noises[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2023, 19(5): 6907-6916.
- [21] LI S, LI Y M. Nonlinearly activated neural network for solving time-varying complex sylvester equation[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 44(8): 1397-1407.
- [22] QI Z H, NING Y Q, XIAO L, et al. Predefined-time zeroing neural networks with independent prior parameter for solving time-varying plural Lyapunov tensor equation[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2024, 35(7): 9408-9416.
- [23] LI W B, GUO C, MA X, et al. A strictly predefined-time convergent and noise-tolerant neural model for solving linear equations with robotic applications[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2024, 71(1): 798-809.
- [24] ZHANG Z J, ZHENG L N, QIU T R, et al. Varying-parameter convergent-differential neural solution to time-varying overdetermined system of linear equations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(2): 874-881.
- [25] DAI J H, TAN P, XIAO L, et al. A fuzzy adaptive zeroing neural network model with event-triggered control for time-varying matrix inversion[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2023, 31(11): 3974-3983.

- [26] XIAO L, HE Y J. A noise-suppression ZNN model with new variable parameter for dynamic sylvester equation[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2021, 17(11): 7513-7522.
- [27] ZHANG Z J, ZHENG L N, WENG J, et al. A new varying-parameter recurrent neural-network for online solution of time-varying sylvester equation[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(11): 3135-3148.
- [28] JIN L, ZHANG Y N, LI S. Integration-enhanced Zhang neural network for real-time-varying matrix inversion in the presence of various kinds of noises[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27(12): 2615-2627.
- [29] 李建锋, 刘哲宇, 荣洋, 等. 用于线性噪声时变凸二次规划的归零神经网络[J]. 通信学报, 2023, 44(4): 226-233.
LI J F, LIU Z Y, RONG Y, et al. Zeroing neural network for time-varying convex quadratic programming with linear noise[J]. Journal on Communications, 2023, 44(4): 226-233.
- [30] XIAO L, CAO P L, SONG W T, et al. A fixed-time noise-tolerance ZNN model for time-variant inequality-constrained quaternion matrix least-squares problem[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2024, 35(8): 10503-10512.
- [31] HU Z S, LI K L, XIAO L, et al. Adams-bashforth-type discrete-time zeroing neural networks solving time-varying complex sylvester equation with enhanced robustness[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(5): 3287-3298.
- [32] XIAO L, ZHANG Y S, DAI J H, et al. A new noise-tolerant and predefined-time ZNN model for time-dependent matrix inversion[J]. Neural Networks, 2019, 117: 124-134.
- [33] JIN J, ZHU J C, ZHAO L, et al. A robust predefined-time convergence zeroing neural network for dynamic matrix inversion[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(6): 3887-3900.
- [34] LI X, WANG L M, ZHONG G M, et al. Fixed-time convergent RNNs with logarithmic settling time for time-variant quadratic programming solving with application to repetitive motion planning[J]. Neural Computing and Applications, 2024, 36(1): 445-460.

[作者简介]



仲国民 (1983-), 男, 浙江杭州人, 博士, 浙江工业大学讲师, 主要研究方向为系统辨识、迭代学习控制和神经计算。



唐逸飞 (2000-), 男, 浙江杭州人, 浙江工业大学硕士生, 主要研究方向为系统辨识和神经计算。



孙明轩 (1961-), 男, 安徽蚌埠人, 博士, 浙江工业大学教授, 主要研究方向为学习系统和神经计算等。